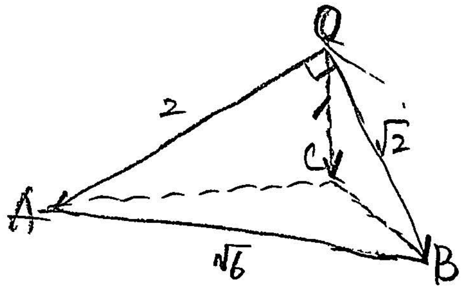
$OA=2,\ OB=\sqrt{2}\quad OC=1\quad \angle AOB=90^\circ$

$\angle AOC=60^\circ$

$\angle BOC=45^\circ$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 90^\circ=0.$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=1.$

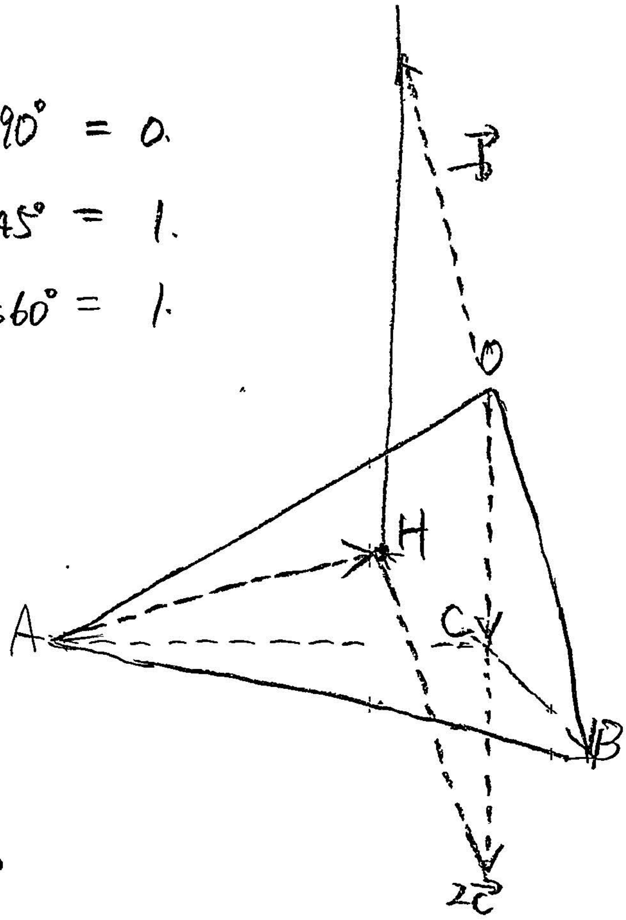
$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos\angle AOC=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1.$

(1)

$\overrightarrow{OH}=s\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\triangle OBC$より

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{b}$ かつ $\overrightarrow{AH}\perp\vec{c}$



$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=-\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}+s\underset{\substack{\shortparallel\\2}}{|\vec{b}|^2}+t\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}=0.$

$2s+t=0\quad\cdots①$

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{c}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}$

$=-\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{\vec{a}\cdot\vec{c}}+s\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}+t\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{|\vec{c}|^2}=0$

$s+t=1\quad\cdots②$

①②より　$s=-1,\ t=2.$

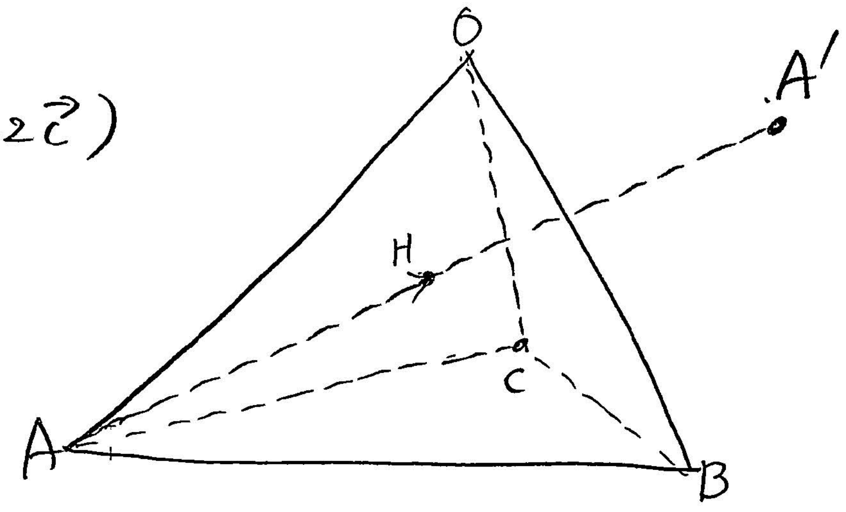
$\therefore\ \overrightarrow{OH}=-\vec{b}+2\vec{c}$　　点Hは$\triangle OBC$の外部

(2)

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = 2(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{OA'} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$$



$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$GP_0 : P_0A'$ を $u : 1-u$ とおく

$$\overrightarrow{OP_0} = u\overrightarrow{OA'} + (1-u)\overrightarrow{OG}$$

$$= u(-\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) + (1-u)\cdot\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

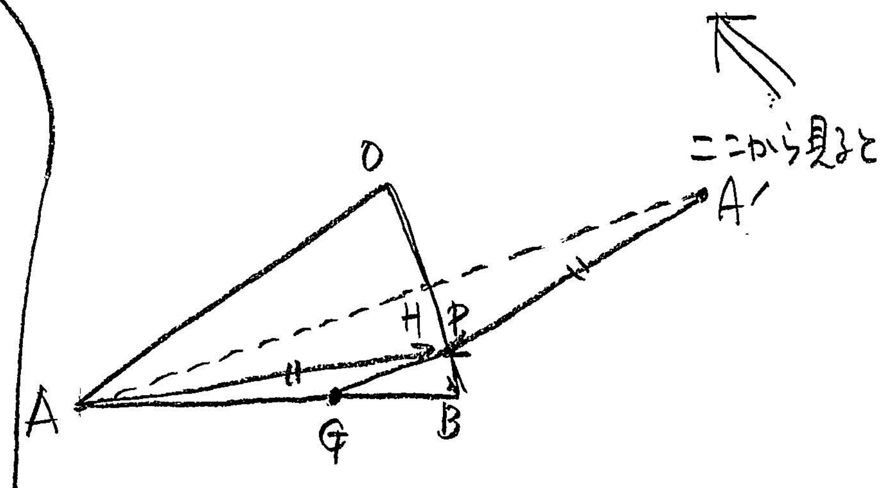
$$= \left(-\frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(-\frac{7}{3}u + \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{11}{3}u + \frac{1}{3}\right)\vec{c}$$

ここで P_0 は平面 OBC 上の点なので、$-\frac{4}{3}u + \frac{1}{3} = 0$

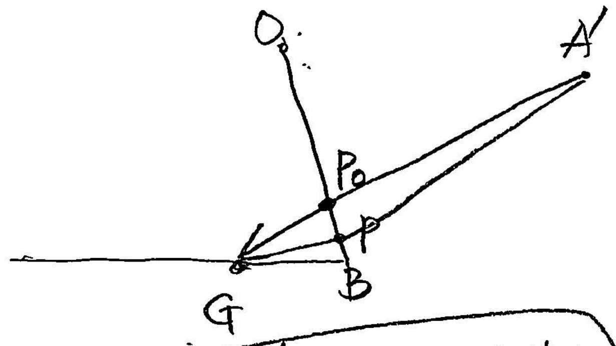
もしこの値が 0 でなければ、平面 OBC の外の点になります

$\therefore u = \frac{1}{4}$

$$\therefore \overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}$$



$AP + PG = A'P + PG \geqq AG$



A'PG が一直線上に並んだときが AP+PG が最小になる

P_0 は AG と △OAB の交点

$$AP + PG \text{ の最小値} = |\overrightarrow{A'G}| = |\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA'}| = \left|\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (-\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c})\right|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{7}{3}\vec{b} - \frac{11}{3}\vec{c}\right| = \frac{1}{3}|4\vec{a} + 7\vec{b} - 11\vec{c}|$$

ここで

$$|4\vec{a}+7\vec{b}-11\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2+49|\vec{b}|^2+121|\vec{c}|^2$$
$$+56\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{0}-154\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{1}-88\underbrace{\vec{c}\cdot\vec{a}}_{1}$$

$$=16\times4+49\times2+121\times1-154-88$$

$$=64+98+121-154-88$$

$$=41$$

$$\therefore\ |4\vec{a}+7\vec{b}-11\vec{c}|=\sqrt{41}$$

よって　AP+PGの最小値は　$\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{41}}{3}}}$